MEKANIKA NEWTONIAN

Persamaan gerak Newton

Seperti diketahui bahwa dinamika adalah cabang dari mekanika yang membahas tentang hokum-hukum fisika tentang gerak benda. Dalam catatan kecil ini kita akan membahas tentang hokum-hukum gerak yang pertama kali diformulasikan oleh Newton. Ada 3 hukum gerak Newton yaitu

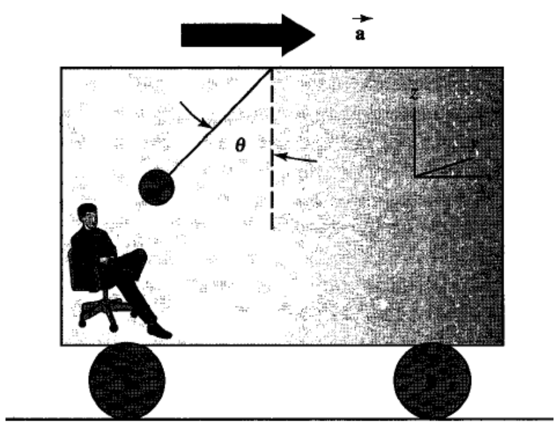
1. Setiap benda akan cenderung diam atau bergerak dalam garis lurus jika tidak ada gaya yang mempengaruhinya.
2. Perubahaan gerak berbanding lurus dengan gaya yang dikenakannya dan searah dengan gaya tersebut.
3. Setiap ada aksi maka selalu ada reaksi yang besarnya sama dan berlawanan, atau saling aksi dari dua benda besarnya selalu sama dan berlawanan arah.

Hukum 1 Newton. System acuan inersia (diam)

Hokum pertama Newton menjelaskan tentann sifat umum dari semua benda yaitu *inersia* (malas). Mudahnya, inersia adalah hambatan benda untuk melakukan perubahan gerak. Jika benda dalam keadaan diam, maka dia enggan untuk digerakkan dan hanya gaya yang dapat menggerakkan. Sebaliknya, jika benda dalam keadaan bergerak, maka dia enggan untuk dihentikan kecuali ada gaya yang menghentikannya.

Deskripsi matematis dari gerak partikel memerlukan sebuah kerangka acuan, atau satu set koordinat dalam ruang konfigurasi yang dapat menentukan posisi, kecepatan dan percepatan dari partikel pada waktu tertentu. Kerangka acuan dimana hukum pertama Newton berlaku valid disebut *kerangka acuan inersia*. Hukum ini mengesampingkan kerangka acuan dipercepat sebagai inersia, karena objek yang *benar-benar* diam atau bergerak dengan kecepatan konstan, yang terlihat dari kerangka acuan yang dipercepat akan muncul dipercepat. Sementara objek yang diam pada kerangka acuan ini akan terlihat dipercepat jika diamati dari kerangka acuan inersia.

Contoh sederhana untuk menjelaskan tentang kerangka acuan noninersia, misalnya seorang pengamat berada di dalam gerbong kereta api yang bergerak dipercepat dengan **a.** kemudian sebuah bandul timbangan dicencang pada atap gerbong. Apa yang yang akan terlihat oleh pengamat tersebut? Jadi, pengamat yang ada di dalam gerbong disini berarti berada dalam kerangka acuan noninersia dan diam terhadap gerbong. Sementara bandul kelihatannya juga diam dengan membentuk sudut θ terhadap vertikal, padahal apabila tidak ada gaya selain grafitasi dan tension, maka bandul akan berada vertikal lurus. Tetapi yang terjadi bahwa ada gaya yang tidak diketahui yang mendorong bandul ke belakang.



Pertanyaan yang muncul adalah bagaimana mungkin menentukan kerangka acuan yang diberikan itu merupakan kerangka inersia. Pertanyaan ini tidak mudah dijawab. Kemudian apakah ada kerangka acuan inersia itu? Untuk tujuan praktis, tentu tidak perlu presisi yang terlampau tinggi. System koordinat yang tetap di bumi adalah hampir inersia. Sebagai contoh, sebuah bola billiard sepertinya bergerak lurus dengan laju konstan selama tidak terjadi benturan dengan bola lain. Padahal sebenarnya, jika diukur dengan presisi tinggi lintasan bola tersebut sedikit melengkung. Hal ini dikarenakan bumi berotasi dan sistem koordinat yang tetap di bumi sebenarnya bukanlah sistem inersia. Sistem yang lebih baik mungkin sistem yang menggunakan pusat bumi, pusat matahari dan bintang yang jauh sebagai titik-titik acuan. Tetapi hal ini juga tidak inersia sekali, karena bumi bergerak mengitari matahari. Berikutnya mungkin lebih baik jika diambil pusat matahari dan dua bintang yang jauh sebagai titik-titik acuan. Biasanya disepakati bahwa siatem inersia, kaitannya dengan mekanikan Newtonian adalah sistem yang didasarkan pada rerata background dari seluruh benda di dunia.

EXAMPLE 2.1.1

Is the Earth a Good Inertial Reference Frame?

Calculate the centripetal acceleration (see Example 1.12.2), relative to the acceleration due to gravity g, of

(a) a point on the surface of the Earth's equator (the radius of the Earth is $R_E = 6.4 \times 10^3$ km)
(b) the Earth in its orbit about the Sun (the radius of the Earth's orbit is $a_E = 150 \times 10^6$ km)
(c) the Sun in its rotation about the center of the galaxy (the radius of the Sun's orbit about the center of the galaxy is $R_G = 2.8 \times 10^4$ LY. Its orbital speed is $v_G = 220$ km/s)

Solution:

The centripetal acceleration of a point rotating in a circle of radius R is given by

$$a_c = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

where T is period of one complete rotation. Thus, relative to g we have

$$\frac{a_c}{g} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2}$$

(a) $\dfrac{a_c}{g} = \dfrac{4\pi^2(6.4\times10^6\,\mathrm{m})}{9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}(3.16\times10^7\,\mathrm{s})^2} = 3.4\times10^{-3}$
(b) 6×10^{-4}
(c) 1.5×10^{-12}

Massa dan Gaya. Hukum Newton kedua dan ketiga

Kita semua tahu bahwa batu yang besar tidak hanya sangat susah untuk diangkat, tetapi juga sulit untuk digerakkan atau diberhentikan dari gerakan dibandingkan dengan sebatang kayu. Kita katakan bahwa batu lebih inersia dibanding kayu tersebut. Ukuran kuantitatif dari inersia adalah massa. Misal kita memiliki dua benda A dan B. bagaimana kita menentukan inersia dari satu relatif dari yang lainnya? Oke, jika kedua benda dibuat untuk saling berinteraksi misalnya dengan mengikatkan pegas ke masing-masing benda, maka akan diperoleh bahwa percepatan dari kedua benda akan selalu berlawanan arah dengan rasio konstan. (diasumsikan bahwa percepatan diberikan di dalam sistem acuan inersia dan hanya pengaruh timbal-balik dari A dan B saja yang diperhatikan). Kita dapat menyatakan hal ini dengan ungkapan

$$\frac{d\,\boldsymbol{v}_A}{dt}=-\frac{d\,\boldsymbol{v}_B}{dt}\mu_{BA} \tag{1}$$

Konstanta μ_{BA} menyatakan ukuran inersia B terhadap A. Dari persamaan itu, kita dapat nyatakan $\mu_{BA}=1/\mu_{AB}$ Mungkin akan lebih bagus lagi jika μ_{BA} dinyatakan lagi dengan ungkapan

$$\mu_{BA}=\frac{m_B}{m_A}$$

dan gunakan benda standar sebagai satuan inersia. Sekarang rasio dari m_B/m_A harus bebas terhadap pemilihan satuan. Jika ada benda satu lagi yaitu C, maka

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}}=\mu_{BA}$$

Kita menyebut besaran *m* sebagai massa.

Lebih mudahnya, *m* lebih baik disebut sebagai massa inersia, karenna definisinya didasarkan pada sifat-sifat inersia. Dalam prakteknya, rasio massa biasanya ditentukan dengan pembobotan. Gaya berat atau grafitasi adalah sebanding dengan apa yang dsebut massa gafitasi dari benda. Akan tetapi, semua eksperimen menunjukkan bahwa massa inersia dan massa grafitasi adalah sepadan, sehingga kita tidak perlu membedakannya.

Jika *m* konstan, maka ungkapan (1) dapat dinyatakan lagi sebagai

$$\frac{d\left(m_A\boldsymbol{v}_A\right)}{dt}=-\frac{d\left(m_B\boldsymbol{v}_B\right)}{dt} \tag{2}$$

Laju perubahan dari produk massa dengan kecepatan merupakan *perubahan gerak* dari hukum Newton kedua, dan menurut hukum tsb, berbanding langsung dengan gaya. Dengan kata lain kita dapat menyatakan hukum Newton kedua melalui ungkapan

$$F = k\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} \qquad (3)$$

dimana **F** adalah gaya dan *k* adalah konstanta kesebandingan. Biasanya *k* diambil sama dengan 1 sehingga (3) menjadi

$$F = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad (4)$$

karena *m* adalah tetap.

Dari persamaan (4) kita dapat mengintepretasikan suatu kenyataan bahwa ungkapam (2) menyatakan bahwa dua benda yang saling berinteraksi mengerahkan gaya yang sama besar dan berlawanan.

$$\boldsymbol{F}_A = -\boldsymbol{F}_B \qquad (5)$$

masing-masing gaya disebut *aksi* dan *reaksi.*

Momentum Linier

Momentum linier merupakan produk dari massa dan kecepatan yang ditandai dengan **p**. Jadi

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \qquad (6)$$

Hukum Newton kedua selanjutnya dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (7)$$

Atau dapat dinyatakan *ketika sebuah gaya bekerja pada sebuah benda, maka gaya tersebut sama dengan laju perubahan momentum linier benda tersebut.*

Hukum ketiga Newton selanjutnya dapat dinyatakan dalam bentuk momentum menjadi

$$\frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} = -\frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt}\mu_{BA} \quad \text{atau} \quad \frac{d\boldsymbol{p}_A}{dt} = -\frac{d\boldsymbol{p}_B}{dt} \quad \text{atau}$$

$$\boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B = constant \qquad (8)$$

Jadi, jumlah total dari dua benda yang saling berinteraksi adalah konstan. Pernyataan ini dapat digeneralisir menjadi " *jumlah total momentum linier dari setiap sistem yang terisolasi adalah konstan"*. Pernyataan ini merupakan statemen dasar dari **hukum kekekalan momentum.**

Contoh. Sebuah roket dengan massa M bergerak di ruang angkasa dengan kecepatan $v_i = 20\, km/s$ relatif terhadap matahari. Roket melepaskan bagian belakangnya dengan massa 0.2 M dengan laju relatif $u = 5\, km/s$. Berapa kecepatan roket tersebut sekarang?

Penyelesaian

Sistem roket dan bagian belakang adalah sistem tertutup dengan tanpa gaya luar yang bekerja (mengabaikan grafitasi matahari), sehingga total momentum liniernya adalah kekal.

$$\boldsymbol{p}_f = \boldsymbol{p}_i$$

Sebelum melepaskan bagian belakangnya, momentum linier roket adalah

$$p_i = M v_i$$

Jika U adalah kecepatan bagian belakang yang dilepas dan v_f adalah kecepatan roket setelah melepaskan bagian belakangnya, maka total momentum setelah pelepasan adalah

$$P_f = 0.8\, v_f + 0.2\, MU$$

karena $\boldsymbol{p}_f = \boldsymbol{p}_i$, maka

$$\begin{aligned}
M v_i &= 0.8\, v_f + 0.2\, MU \\
M v_i &= 0.8\, M v_f + 0.2\, M\left(v_f - u\right) \\
v_f &= v_i + 0.2\, u \\
v_f &= v_i + 0.2\, u \\
v_f &= 20 + 0.2\,(5) = 21\, km/s
\end{aligned}$$

Gerak partikel

Pers. 4 merupakan persamaan gerak partikel karena pengaruh gaya net **F.** Jumlah vektor gaya yang bekerja pada partikel tersebut dinyatakan oleh

$$\boldsymbol{F}_{nett}=\sum \boldsymbol{F}_i=m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=m\,\boldsymbol{a}$$

Gerak rectilinier: percepatan tetap dibawah pengaruh gaya konstan

Ketika partikel bergerak dengan lintasan lurus, maka gerak tersebut disebut rectilinier. Jika diambil *x* diambil sebagai lintasan partikel, maka persamaan gerak dapat dinyatakan sebagai

$$F_x(x,\dot{x},t)=m\ddot{x} \tag{10}$$

Untuk situasi dimana gaya *F* adalah konstan, maka diperoleh percepatan konstan juga.

$$\ddot{x}=\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}=a \tag{11}$$

dan dengan integrasi sederhana diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{x}&=v=at+v_o\\ x&=\frac{1}{2}at^2+v_o t+x_o\end{aligned} \tag{12}$$

dimana v_o dan x_0 masing-masing adalah kecepatan dan posisi saat t = 0. Dengan mengliminasi *t* pada pers (12), maka diperoleh

$$2a(x-x_o)=v^2-v_o^2 \tag{12.b}$$

Aplikasi untuk persamaan di atas misalnya *benda jatuh bebas di dekat permukaan bumi*, dengan mengabaikan hambatan udara maka percepatan hampir konstan.

Contoh

Sebuah balok bebas meluncur ke bawah pada bidang yang smooth dan tanpa gesekan. Susut kemiringan bidang adalah θ terhadap horisontal. Jika tiggi bidang *h* dan balok dilepas dari keadaan diam dari atas, maka hitunglah kecepatan balok saat menyentuh dasar.

Penyelesaian

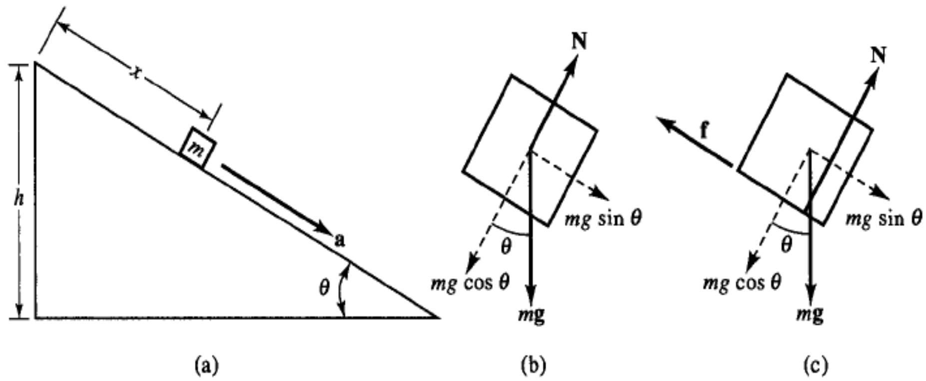


Figure 2.2.1 (a) A block sliding down an inclined plane. (b) Force diagram (no friction). (c) Force diagram (friction $f = \mu_k \mathbf{N}$).

Kita pilih sistem koordinatnya terlebih dahulu, misal sumbu-x sepanjang kemiringan bidang dimana *x-positif* arahnya yang kebawah dan sumbu-y yang tegak lurus bidang. Satu-satunya gaya yang sepanjang sumbu-x adalah $mg \sin\theta$ yang besarnya konstan. Jadi

$$\ddot{x} = a = \frac{F_x}{m} = g \sin\theta \quad \text{dan} \quad x - x_0 = \frac{h}{\sin\theta}$$

dari $2a(x - x_o) = v^2 - v_o^2$, dimana $v_o = 0$, maka

$$v^2 = 2a(x - x_0) = 2gh$$

Sekarang jika bidang agak kasar, maka terdapat gaya gesek yang besarnya sebanding dengan gaya normalnya

$$f_k = \mu_k N \quad \text{, dimana} \quad N = mg\cos\theta$$

dan total gaya pada sumbu-x adalah $mg\sin\theta - f_k$ atau $mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$. Karena yang bekerja pada benda konstan, maka

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$$

Jadi, kecepatan akan bertambah jika ungkapan di dalam kurung positif, jika ungkapan di dalam kurung sama dengan nol berarti kecepatan konstan dan jika negatif maka benda mungkin berhenti atau kecepatan berkurang.

Gaya bergantung posisi: Konsep energi potensial dan kinetik.

Jika gaya tidak gayut terhadap kecepatan atau waktu, maka persamaan gerak rectilinier adalah

$$F(x)=m\ddot{x} \tag{13}$$

jika diselesaikan dengan aturan rantai, maka (13) menjadi

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx}=v\frac{dv}{dx} \tag{14}$$

sehingga

$$F(x)=mv\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dx}=\frac{dT}{dx} \tag{15}$$

dimana besaran $T=\frac{1}{2}mv^2$ adalah energi kinetik partikel. Pers. 15 dapat dinyatakan dalam bentuk integral

$$W=\int_{x_o}^{x}F(x)dx=T-T_o \tag{16}$$

dimana W adalah usaha yang dilakukan partikel karena gaya *F. Jadi kerja* sama dengan perubahan energi kinetik partikel. Jika didefinisikan fungsi $V(x)$ yaitu

$$-\frac{dV(x)}{dx}=F(x) \tag{17}$$

dimana *V(x)* adalah energi potensial, maka kerja yang dilakukan partikel

$$W=\int_{x_o}^{x}F(x)dx=-\int_{x_o}^{x}dV=-V(x)+V(x_o)=T-T_o \tag{18}$$

Pers. (18) tidak berubah *V(x)* diubah dengan menambahkan konstanta sembarang C

$$-[V(x)+C]+[V(x_o)+C]=-V(x)+V(x_o) \tag{19}$$

Pers. (18) sekarang menjadi bentuk

$$T_o+V(x_o)=constant=T+V(x)=E \tag{20}$$

yang merupakan persamaan energi, dimana *E* adalah energi total partikel.

Gerak partikel dapat peroleh dengan menyelesaikan pers. 20, yaitu

$$v=\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]} \tag{21}$$

yang ditulis dengan ungkapan integral

$$\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}}=t-t_o \tag{22}$$

Dari pers. (21) dapat dijelaskan bahwa *v* akan bernilai nyata apabila nilai x sedemikian rupa hingga *V(x)* bernilai kurang dari atau sama dengan *E*. *S*ecara fisis berarti bahwa partikel tsb dibatasi pada daerah sedemikian hingga $V(x)\le E$ terpenuhi. Selanjutnya, jika $V(x)=0$ berarti partikel dalam keadaan diam. Ini berarti partikel berhenti (diam) dan membalik gerakannya melewati titik-titik dimana persamaan masih berlaku. Titik-titik ini disebut sebagai titik balik gerakan.

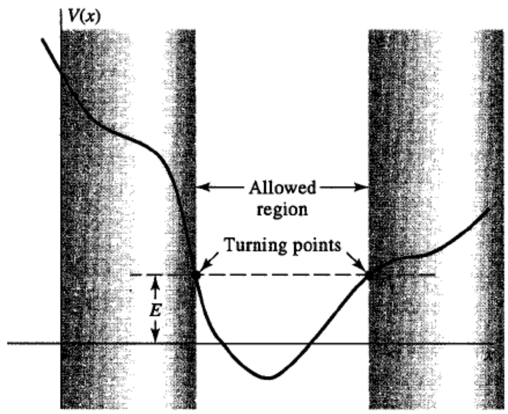


Figure 2.3.1 Graph of a one-dimensional potential energy function $V(x)$ showing the allowed region of motion and the turning points for a given value of the total energy E.

Contoh. Jatuh bebas

gerak jatuh bebas adalah contoh dari gerak konservatif. Jika diambil sumbu-x positif mengarah ke atas, maka gaya grafitasi sama dengan *-mg,* sehingga *-dV/dx=-mg* dan *V=mgx + C.* Jika dipilih *C=0* yang berarti bahwa *V=0* pada saat *x=0.* Persamaan energinya kemudian

$$\frac{1}{2}mv^2+mgx=E$$

dimana energi total *E* ditentukan oleh keadaan awalnya. Misalnya, jika benda dilempar keatas dengan kecepatan awal v_o dari $x=o$, maka $E=\frac{1}{2}m\,v_o^2=\frac{1}{2}mv^2+mgx$, sehingga

$$v^2=v_o^2-2\text{gx}$$

Titik balik gerakan yang merupakan tinggi maksimum diperoleh dengan mensetting *v=0*, sehingga diperoleh

$$h=x_{max}=\frac{v_o^2}{2g}$$

Bagaimana jika benda dijatuhkan dari atas?

Contoh. Variasi grafitasi dengan tinggi.

Contoh sebelumnya kita menganggap bahwa *g* konstan. Sebenarnya gaya grafitasi antara dua benda berbanding terbalik dengan kuadrat jaraknya. Jadi gaya grafitasi yang dikenakan pada sebuah benda oleh bumi adalah

$$F_r=-\frac{GMm}{r^2}$$

dimana *G* adalah konstanta grafitasi Newton, *M* massa bumi, *m* massa benda dan *r* jarak antara pusat bumi dengan benda. Jadi mengingat gaya sama dengan *-mg* ketika benda tepat berada di permukaan bumi, maka $mg=GMm/r_e^2$ atau $g=GM/r_e^2$ adalah percepatan grafitasi pada permukaan bumi. Jika diambil *x* berada di atas permukaan bumi, maka $r=r_e+x$. dengan mengabaikan gaya lain seperti hambatan udara, maka diperoleh

$$F(x)=-mg\frac{r_e^2}{(r_e+x)^2}=m\ddot{x}$$

yang merupakan persamaan diferensial gerak jatuh (naik) vertikal dengan variasi gravity. Bentuk integrasinya adalah

$$-mgr_e^2\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{(r_e+x)^2}=\int_{v_o}^{v}mv\,dv$$

$$mgr_e^2\left(\frac{1}{(r_e+x)}-\frac{1}{(r_e+x_o)}\right)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_o^2$$

Ini juga merupakan persamaan energi dengan energi potensial $V(x)=-mg[r_e^2/(r_e+x)]$

Tinggi maksimum: Escape speed

misalnya sebuah benda ditembakkan ke atas dengan kecepatan awal v_o dari permukaan bumi $x_o = 0$. Dari persamaan energi diperoleh $v^2 = v_o^2 - 2gx\left(1 + \frac{x}{r_e}\right)^{-1}$. Jika dari persamaan tersebut diambil $x \ll r_e$, maka medan grafitasi adalah uniform. Titik balik maksimum terjadi jika *v* sama dengan nol dan dengan memecahkan *x,* maka

$$x_{max} = h = \frac{v_o^2}{2g}\left(1 - \frac{v_o^2}{2gr_e}\right)^{-1}$$

Jika suku kedua dari ungkapan di atas diabaikan karena $v_o^2 \ll 2gr_e$, maka kita memperoleh bentuk dari medan grafitasi yang uniform. Dari sini juga diperoleh kecepatan awal berapa sehingga benda dapat melesat jauh tak kembali lagi (*escape)* yaitu dengan mensetting faktor di dalam kurung sama dengan. Jadi

$$v_e = \sqrt{2gr_e}$$

dimana $g = 9.8\, m/s^2, r_e = 6.4 \times 10^6\, m$ maka $v_e \approx 11\, km/s$.

Di bumi, kecepatan molekul oksigen dan nitrogen adalah sekitar 0.5 km/s yang mana jauh lebih kecil dari laju escape, maka molekul-molekul ini masih tetap ada. Sebaliknya, bulan tidak memiliki atmosfir karena massa bulan relatif jauh lebih kecil dari bumi maka oksigen maupun nitrogen tidak ada menyelimuti bulan. Sementara walaupun hidrogen sangat berlimpah di dunia, tetapi hanya sebagian kecil berada di atmosfir bumi karena kecepatannya melebihi laju escape.

Contoh 7. Fungsi Morse *V(x)* mendekati energi potensial dari vibrasi molekul diatomik sebagai fungsi *x,* yaitu jarak dari kedua atom dan diberikan oleh

$$V(x) = V_o\left[1 - e^{-x - x_o/\delta}\right]^2 - V_o$$

dimana V_o, x_o dan δ adalah parameter-parameter yang dipilih untuk mendeskripsikan perilaku pasangan-pasangan atom yang teramati. Gaya dari setiap atom yang dikerahkan pada atom yang lain diberikan oleh turunan fungsi terhadap *x*. *T*unjukkan bahwa x_o adalah jarak dua atom saat energi potensialnya minimum, dan nilai energi potensial pada saat ini adalah $V(x_o)=-V_o$. Jika molekul berada dalam konfigurasi ini, maka dikatakan berada di dalam keadaa setimbang.

Penyelesaian

Energi potensial dari molekul diatomik berharga minimum ketika turunannya terhadap *x* sama dengan nol.

$$\begin{aligned} F(x)=-dV\frac{(x)}{dx}&=0 \\ 2\frac{V_o}{\delta}\left(1-e^{-(x-x_o)/\delta}\right)\left(e^{-(x-x_o)/\delta}\right)&=0 \\ \left(1-e^{-(x-x_o)/\delta}\right)&=0 \\ \ln(1)=-(x-x_o)/\delta&=0 \\ x&=x_o \end{aligned}$$

Nilai energi potensial dalam keadaan minimum dapat dicapai dengan mensetting $x=x_o$, sehingga memberikan $V(x_o)=-V_o$.

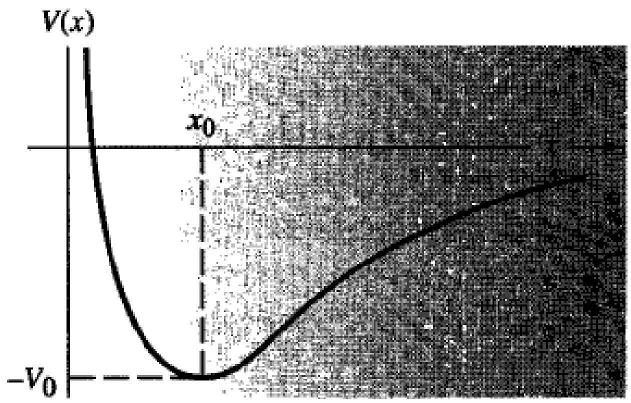
Contoh 8. Gambar di bawah memperlihatkan fungsi energi potensial dari molekul diatomik. Tunjukkan bahwa ketika jarak *x* dekat ke x_o fungsi energi potensial adalah parabolik dan resultan gaya pada setiap atom pasangan adalah linier dan selalu menuju ke posisi kesetimbangan

Penyelesaian.

Dengan mengekspansikan ungkapan fungsi energi potensial di dekat posisi setimbang

$$V(x) = V_o\left[1-\left(1-\left(x-x_o/\delta\right)\right)\right]^2 - V_o$$
$$= \frac{V_o}{\delta^2}(x-x_o)^2 - V_o$$
$$F(x) = -dV\frac{(x)}{dx} = -\frac{2V_o}{\delta^2}(x-x_o)$$

Lihat bahwa gaya adalah linier dan selalu menuju ke posisi setimbang.



Gaya gayut kecepatan: Hambatan fluida dan kecepatan terminal

Sering dijumpai bahwa gaya yang bekerja pada sebuah benda merupakan fungsi dari kecepatannya, misalnya pada kasus benda yang bergerak di dalam fluida dimana terdapat hambatan viskositas. Persamaan diferensial geraknya dapat dituliskan

$$F_o + F(v) = m\frac{dv}{dt}$$
$$F_o + F(v) = mv\frac{dv}{dx} \qquad (23)$$

Dengan melakukan separasi variabel, maka integrasi akan menghasilkan t dan x sebagai fungsi v. integrasi kedua akan menghasilkan hubungan antara t dan x.

Untuk kasus hambatan fluida termasuk gesekan udara, maka $F(v)$ dapat dinyatakan sebagai

$$F(v) = -c_1 v - c_2 v|v| = -v(c_1 + c_2|v|)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta yang bergantung pada ukuran dan bentuk benda.

Contoh 10. Gerak linier dengan resistensi linier

Misalkan balok dilempar dengan kecepatan awal v_o pada permukaan yang smooth dan terdapat gesekan udara sehingga suku linier yang dominan. Kemudian, searah dengan gerakan $F_o = 0$ dan $F(v) = -c_1 v$. Persamaan diferensial geraknya adalah

$$-c_1 v = m\frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad t = \int_{v_o}^{v} -\frac{mdv}{c_{1v}} = \frac{-m}{c_1}\ln\left(\frac{v}{v_o}\right)$$

Penyelesaian

Pertama nyatakan *v* sebagai fungsi *t*, maka dengan mudah diperoleh

$$v = v_o e^{-c_{1t}/m}$$

jadi terlihat bahwa kecepatan berkurang secara eksponesial terhadap waktu