LAPORAN PENELITIAN

KAJIAN AWAL SIMULASI NUMERIK STATIKA VORTEKS BERLANDASKAN PADA MODEL GINZBURG-LANDAU

Oleh :
Supardi, M.Si
Fuad Anwar, M.Si

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2004

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Alloh swt yang telah memberikan rahmat dan hidayahNya, sehingga pada saat ini kami dapat menyelesaikan dan melaporkan hasil penelitian yang berjudul " **KAJIAN AWAL SIMULASI NUMERIK STATIKA VORTEKS BERLANDASKAN PADA MODEL GINZBURG-LANDAU".** Melalui penelitian ini diharapkan dapat meningkatkan kualitas penelitian di bidang komputasi di Jurusan Fisika Universitas Negeri Yogyakarta.

Penelitian ini dapat dilakukan dan diselesaikan dengan baik atas bantuan beberapa pihak yang secara keseluruhan tidak dapat kami sebutkan satu persatu, untuk itu pada kesempatan ini peneliti ingin menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Bapak Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas kepada peneliti
2. Bapak Ketua Jurusan Pendidikan Fisika FMIPA UNY yang telah memberikan dorongan untuk terus melakukan penelitian.
3. Bapak Dr.Mundlilarto selaku Badan Pertimbangan Penelitian FMIPA UNY yang telah memberika masukan untuk perencanaan, pelaksanaan, dan penyusunan laporan ini.
4. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Pendidikan Fisika yang telah memberikan masukan-masukan demi sempurnanya laporan penelitian ini.

Peneliti berharap semoga hasil penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu Fisika khususnya pada bidang komputasi.

Yogyakarta, Januari 2002

Supardi, M.Si

DAFTAR ISI

KAJIAN AWAL SIMULASI NUMERIK STATIKA VORTEKS BERLANDASKAN PADA MODEL GINZBURG-LANDAU

PRE-ANALYSIS OF NUMERICAL SIMULATION OF VORTEX STATICS BASED ON GINZBURG-LANDAU MODEL

Supardi*, Fuad Anwar, Pekik Nurwantoro***, Agung B.S.U*****

* : Universitas Negeri Yogyakarta
** : Universitas Negeri Surakarta
*** : Universitas Gadjah Mada

ABSTRAK

Telah dilakukan pengkajian awal terhadap statika terbentuknya *vorteks* di dalam superkonduktor *mesoscopic* berlandaskan pada model Ginzburg-Landau. Vorteks adalah filamen-filamen berukuran kecil yang terbentuk akibat pengenaan medan magnet luar **H** pada bahan superkonduktor jenis ke-II dalam ranah $\mathbf{H}_{c1} < \mathbf{H} < \mathbf{H}_{c2}$. Akibat munculnya vorteks tersebut, maka terjadi terobosan parsial fluks magnet pada bahan. Untuk memperoleh konfigurasi vortex pada superkonduktor jenis ke-II akibat pengenaan medan magnet luar **H**, langkah yang dilakukan adalah meminimisasi ungkapan fungsional Ginzburg-Landau yang diwakili oleh beda rapat tenaga Gibbs antara keadaan superkonduktif bahan dengan keadaan normalnya. Hasil kajian memberikan bentuk deskrit fungsional yang siap untuk dilakukan langkah komputasi untuk memperoleh distribusi parameter benahan $\psi(\mathbf{r})$ dan potensial vektor magnet $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Kata kunci : vorteks, keadaan superkonduktif, minimisasi

BAB I

PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Perkembangan di bidang teknologi mikrofabrikasi, akhir-akhir ini telah membuat superkonduktor *mesoscopic* menjadi sangat populer untuk bahan kajian. Superkonduktor mesoscopic merupakan superkonduktor yang memiliki ukuran ketebalan bahan sebanding dengan panjang koherensiya $\xi(T)$ dan kedalaman penetrasi medan magnet $\lambda(T)$. Banyak eksperimen dan kajian teoritis dilakukan untuk mengkaji tanggap magnetik dari berbagsai bentuk bahan mesoscopik tersebut. Contoh aplikasi superkonduktor suhu tinggi antara lain sebagai piranti pelindung magnetik, sistem pencitraan medis, piranti interferensi kuantum superkonduktif (SQUIDS), sebagai pembangkit medan magnet super tinggi dalam MRI (*magnetic resonance imaging*) dan lain sebaginya.

Mengingat begitu besar prospek yang dijanjikan bahan ini di waktu mendatang, maka tidak mengherankan jika hadiah Nobel di bidang fisika tahun 2003 ini diberikan kepada dua dari tiga fisikawan yang telah memberikan sumbangan penting dalam menjelaskan fenomena fisika tentang superkonduktivitas. Mereka adalah Vitally L. Ginzburg dan Abrikosov yang telah memberikan kontribusi penting dalam menjelaskan fenomena superkonduktivitas pada bahan superkonduktor jenis ke-II melalui dua persamaan Ginzburg-Landau terkopel.

Oleh karena begitu pentingnya peranan dua persamaan Ginzburg-Landau ini dalam mengungkap gejala superkonduktivitas bahan superkonduktor, maka kajian awal penelitian ini akan memberikan arahan bagi pengungkapan karakteristik bahan didasarkan pada model Ginzburg-Landau. Dengan dilandasi model inilah, selanjutnya akan dapat digambarkan konfigurasi vortex pada bahan superkonduktor di bawah pengaruh medan magnet luar **H** dalam ranah $H_{c1} \leq \mathbf{H} \leq H_{c2}$.

Tujuan Penelitian

Tujuan umum dari penelitian ini adalah menentukan ungkapan yang tepat untuk menyatakan potensial vektor **A** sehingga tera terhadap besaran ini tidak memunculkan kerumitan pada pengungkapan bentuk fungsional rapat tenaga Gibbs. Tujuan lainnya adalah menentukan bentuk deskrit terhadap fungsional rapat tenaga bebas Gibbs, sehingga secara komputasi siap untuk dilakukan minimisasi.

Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat disumbangkan dari kajian awal penelitian ini adalah setelah pengungkapan terhadap fungsional rapat beda tenaga Gibbs diperoleh, maka selanjutnya akan dapat dilakukan minimisasi terhadap ungkapan tersebut untuk menentukan karakteristik superkonduktor jenis ke-II di bawah pengaruh medan magnet luar **H.**

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Sifat superkonduktivitas suatu bahan superkonduktor dapat ditentukan oleh bentuk fungsional sistem. Bentuk fungsional yang berpadanan dengan persamaan Ginzburg-Landau adalah apa yang disebut beda rapat tenaga bebas Gibbs antara keadaan superkonduktif dan keadaan normal. Analisa secara seksama terhadap beda rapat tenaga tersebut memberikan gambaran lengkap terhadap besar parameter benahan yang terdistribusi di seluruh bahan, begitu pula rapat fluks magnet di seluruh bahan. Ungkapan beda rapat tenaga Gibbs tersebut diberikan oleh (Tinkham,1996; Cyrot dan Pavuna, 1992)

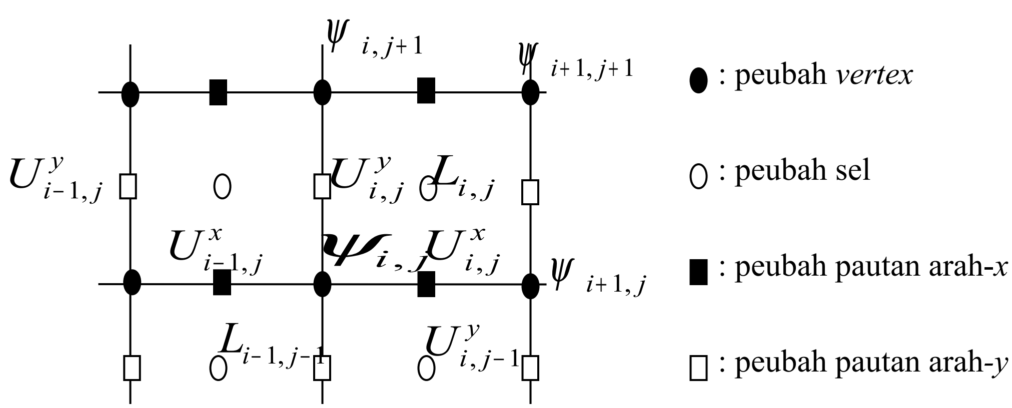
$$\begin{aligned}\Delta G(\psi, \mathbf{A}) \equiv \int_{\Omega} (g_s - f_n) = \int_{\Omega} \Bigg[\alpha(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}\beta(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 \\ + \frac{1}{2m}\left|\left[-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r})\right|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mu_0\mathbf{H}|^2 \Bigg]\end{aligned} \qquad (4)$$

Dengan melakukan minimisasi terhadap ungkapan fungsional Ginzburg-Landau inilah, maka distribusi kedua besaran di atas akan dapat ditentukan. Setelah distribusi kedua besaran tersebut ditemukan, kemudian konfigurasi vortex di dalam bahan yang ditinjau akan dapat diperoleh. Untuk tujuan menemukan distribusi kedua besaran tersebut, maka langkah pertama yang harus dilakukan adalah menampilkan secara eksplisit fungsional tersebut sesuai keadaan fisis yang berlaku pada bahan. Langkah berikutnya adalah menyajikan bentuk fungsional Ginzburg-Landau tersebut dalam bentuk diskretnya yang selanjutnya siap untuk dilakukan minimisasi untuk menemukan harga minimum global sistem.

BAB III

METODE PENELITIAN

Jika ditinjau suatu bahan superkonduktor dengan dimensi tertentu yaitu *L*. Bentuk geometri bahan yang berbentuk silinder dimodelkan sebagai komposisi bentuk empat persegi panjang dengan panjang masing-masing sisi-sisinya adalah *L* dan arahnya sejajar sumbu *x* dan *y*. Model pendekatan seperti ini tentunya hanya berlaku untuk daerah yang jauh dari permukaan silinder. Oleh karena itu, penggunaan syarat batas di permukaan perlu dikaji secara mendalam dalam penelitian ini. Dianggap bahwa bahan berada di bawah pengaruh medan magnet luar yang seragam dan arah sejajar sumbu *z* positip yaitu $\mathbf{H} = H\hat{e}_z$, dengan *H* adalah tetapan dan $\hat{e}_z$ adalah vektor satuan searah sumbu *z*. Dengan sistem seperti ini maka masalah komputasi dapat dibawa ke dalam bentuk dua dimensi karena semua besaran ruang yang dihitung tereduksi ke sumbu *x* dan *y* saja. Upaya diskretisasi dapat dilakukan dengan membagi bidang *x*-*y* ke dalam sel-sel kecil dengan luas $h_x h_y$ seperti disajikan pada gambar 1.



Gambar 1. Skema sel-sel yang menyajikan peubah-peubah diskret

Dalam hal ini h_x dan h_y masing-masing disebut ukuran kisi ke x dan y sedemikian hingga setiap posisi di x dan y memenuhi kaitan

$$x_i = x_0 + ih_x; \quad y_i = y_0 + ih_y; \; i = 0,1,2,... \qquad j = 0,1,2,... \tag{5}$$

Merujuk kepada metode ψU dalam ruang dimensi dua, variabel fundamental terdiri atas parameter benahan ψ dan dua medan bantu (*auxilary fields*) yaitu U^x dan U^y yang terkait dengan potensial vektor $\mathbf{A}$ melalui hubungan (Gunter *dkk.,* 2002 ; Crabtree *dkk*, 2000)

$$\begin{aligned} U^x(x,y,t) &= \exp\left(-i\int_{x_0}^{x} A_x(\xi, y, t)\, d\xi\right) \\ U^y(x,y,t) &= \exp\left(-i\int_{y_0}^{y} A_y(x, \eta, t)\, d\eta\,\xi\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Metode numerik untuk masalah ini selanjutnya dapat dibawa ke dalam tiga larik kompleks yaitu

1. $\psi_{i,j} \equiv \psi(x_i, y_j)$ dengan $1 \le i \le N_x + 1, 1 \le j \le N_y + 1$ berada pada setiap sudut sel.

   Harga dari $\psi_{i,j}$ adalah pendekatan pada parameter benahan pada posisi (x_i, y_j)

2. $U^x_{i,j}$ disebut peubah pautan (*link variable*) pada arah sumbu-*x* dengan $1 \le i \le N_x, 1 \le j \le N_y + 1$. Peubah pautan ini menempati tiap titik tengah setiap sisi

   sel. Harga $U^x_{i,j}$ mendekati nilai $\exp\left(-i\int_{x_i}^{x_{i+1}} A_x(\xi, y_j)\, d\xi\right)$, dengan i = 1,2,… N_x dan $j = 1,2,\ldots, N_y + 1$

3. $U^y_{i,j}$ disebut peubah pautan pada arah sumbu-y dengan $1 \le i \le N_x + 1, \quad 1 \le j \le N_y$ berpadanan dengan pautan vertikal (sumbu-y) sel. Harga $U^y_{i,j}$ mendekati harga

$\exp\left(-i \int_{y_j}^{y_{j+1}} A_y \left(x_i, \eta \right) d\eta \right)$ dengan $i = 1, 2, ..., N_x + 1 \quad j = 1, 2, \ldots, N_y$

Penyajian dalam bentuk deskret peubah pautan pada butir 2 dan 3 di atas memungkinkan untuk diperoleh bentuk diskret dari persamaan Ginzburg-Landau, fungsional tenaga bebas Gibbs dan syarat batas yang sesuai yaitu

$$U^x_{i,j} = \prod_{k=1}^{i-1} U^x_{k,j};\ U^y_{i,j} = \prod_{k=1}^{j-1} U^y_{i,j}, \tag{7}$$

$$U^x_{i,j} = \bar{U}^x_{i,j} U^x_{i+1,j}\ U^y_{i,j} = \bar{U}^y_{i,j} U^y_{i,j+1}, \tag{8}$$

dengan $\bar{U}$ merupakan konjugat kompleks dari U .

Dengan menggunakan pendekatan nilai tengah dan dengan pengambilan nilai potensial vektor magnet di tengah salah satu sisi yaitu $A_{x;i,j} = A_x\left(x_i + h_x / 2, y_j\right)$ dan $A_{y;i,j} = A_x\left(x_i, y_j + h_y / 2\right)$ maka diperoleh bentuk diskret peubah pautan yaitu

$$U_{x;i,j} = \exp\left(- ih_x A_{x;i,j}\right); \qquad U_{y;i,j} = \exp\left(- ih_y A_{y;i,j}\right) \tag{9}$$

Dan sebaliknya bentuk diskret potensial vektor magnet adalah

$$A_{x;i,j} = -\left(ih_x\right)^{-1} \ln U_{x;i,j}; \qquad A_{y;i,j} = -\left(ih_y\right)^{-1} \ln U_{y;i,j} \tag{10}$$

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini baru merupakan penelitian awal yang belum dapat memberikan gambaran lengkap tentang karakteristik superkonduktor. Sejauh ini, yang telah dilakukan oleh peneliti barulah pada tahap pembuatan ungkapan-ungkapan matematis yang selanjutnya siap untuk dikomputasikan. Tetapi, mengingat rumitnya ungkapan matematis yang diperoleh maka masih diperlukan waktu panjang untuk dapat memecahkannya.

Pada kajian awal ini, penelitian difokuskan hanya pada penyelesaian terhadap ungkapan fungsional Ginzburg-Landau yang diwakili oleh rapat beda tenaga Gibbs antara keadaan superkonduktif dan keadaan normalnya seperti dinyatakan pada persamaan (4). Sedangkan untuk penyelesaian persamaan Ginzburg-Landau terkopel tidak dikaji, mengingat kajian yang akan dilakukan hanya terfokus pada penylesaian statik alih-alih penyelesaian dinamiknya.

Ungkapan terpenting dalam menentukan karakteristik superkonduktor adalah ungkapan beda rapat tenaga Gibbs seperti dinyatakan oleh persamaan (4). Berdasarkan pada ungkapan ini, maka untuk mensimulasikan konfigurasi vorteks superkonduktor jenis ke-II diperlukan bentuk ungkapan tak berdimensi. Dalam bentuk tak berdimensi fungsional tenaga bebas Gibbs $E[\psi\,,A]$ mengambil bentuk

$$E[\psi\,,\mathbf{A}] = \int_{\Omega}\left[\left|(\nabla - i\mathbf{A})\psi\right|^{2} + \psi\left(\frac{1}{2}|\psi|^{2} - \tau\right) + \kappa^{2}\left(|\nabla \times \mathbf{A}|^{2} - 2\mathbf{H}\cdot\nabla \times \mathbf{A}\right)\right]d\Omega \qquad (11)$$

dengan ψ merupakan parameter benahan dan **A** adalah potensial vektor.

Dengan bentuk fungsional tenaga bebas Gibbs demikian dapat dimungkinkan untuk melakukan transformasi tera (*gauge transformation*) sedemikian hingga besaran $|\boldsymbol{\psi}|^2$ dan **A** tetap tidak berubah terhadap transformasi koordinat apapun (*invarian*) yaitu

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \text{dan} \quad \psi \rightarrow \psi e^{i\chi} \tag{12}$$

dengan χ adalah sebarang medan skalar.

Untuk keperluan komputasi diperkenalkan dua medan bantu yaitu $U^x_{i,j}$ yang berkaitan dengan besaran potensial vektor pada arah sumbu-*x,* serta $U^y_{i,j}$ yang berhubungan dengan veriabel ke arah-*y.* Masing-masing variabel bantu tersebut telah didefinisikan pada ungkapan (6). Penggunaan terhadap ungkapan $U^x_{i,j}$ dan $U^y_{i,j}$ dilakukan untuk menghindari munculnya gauge pada besaran potensial vektor ketika dilakukan pembongkaran terhadap suku-suku yang terkandung pada persamanaan Ginzburg-Landau tergandengn maupun pada fungsionalnya. Dengan memanfaatkan ungkapan variabel bantu ini, maka ungkapan yang berhubungan dengan besaran potensial vektor akan terlihat lebih sederhana.

Diskritisasi Fungsional Ginzburg-Landau

Dengan menggunakan ungkapan variabel pautan seperti dinyatakan oleh persamaan (9) dan (10) dan dalam ketelitian sampai orde kedua, maka setiap suku pada fungsional Ginzburg-Landau dapat dinyatakan kembali dalam bentuk-bentuk deskrit sebagai berikut

- Suku ke-1

Dari kesamaan $(\nabla - iA)^2\psi = \overline{U}^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(U^x\psi\right) + \overline{U}^y \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(U^y\psi\right)$ diproleh ungkapan

$$(\nabla - iA)^2\psi = \frac{U_{i,j}^{x}\psi_{i+!,j} - 2\psi_{i,j} + \overline{U}_{i,j-1}^{x}\psi_{i-!,j}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j}^{y}\psi_{!,j+!} - 2\psi_{i,j} + \overline{U}_{i,j-1}^{y}\psi_{!,j-1}}{h_y^2} + O\left(h_x^2 + h_y^2\right) \tag{13}$$

- Suku ke-2

  Dari pernyataan $\left(\tau\psi - |\psi|^2\psi\right)$ diperoleh

$$\left(\tau\psi - |\psi|^2\psi\right) = \psi_{i,j}\left(\tau_{i,j} - \overline{\psi}_{i,j}\psi_{i,j}\right) \tag{14}$$

- Dengan memperkenalkan variabel bantu pada pusat sel $L_{i,j} = U_{i,j}^{x}U_{i+1,j}^{y}\overline{U}_{i,j+1}^{x}\overline{U}_{i,j}^{y}$ dan dengan menggunakan identitas Stokes, maka dapat dinyatakan induksi magnet pada pusat sel yaitu $B_{i,j}^{x} = B_z\left(x_i + h_x/2, y_j + h_y/2\right)$ dapat dikaitkan dengan varibel $L_{i,j}$ melalui hubungan

$$L_{i,j} = \exp\left(-ih_xh_yB_{i,j}^{x}\right)\left(1 + O\left(h_x^2 + h_y^2\right)\right) \tag{15}$$

- Dengan memanfaatkan kaitan pada butir ke-3 dan mengingat $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, maka suku ke-3 dapat dinyatakan kembali menjadi bentuk

$$\begin{aligned}\left(|\nabla \times \mathbf{A}|^2 - 2\mathbf{H}\cdot\nabla \times \mathbf{A}\right) &= (\nabla \times \mathbf{A})\cdot[(\nabla \times \mathbf{A}) - 2\mathbf{H}] \\ &= \frac{i\ln L_{i,j}}{h_xh_y}\left(\frac{i\ln L_{i,j}}{h_xh_y} - 2H\right)\end{aligned} \tag{16}$$

Dengan menggunakan ungkapan-ungkapan pada butir kesatu1 hingga butir keempat, maka fungsional rapat beda tenaga Gibbs dapat dinyatakan oleh

$$E_{i,j} = \frac{h_xh_y}{2}\left(\frac{\left|U_{i,j}^{x}\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}\right|^2}{h_x^2} + \frac{\left|U_{i,j+1}^{x}\psi_{i+1,j+!} - \psi_{i,j+1}\right|^2}{h_x^2} + \frac{\left|U_{i,j}^{y}\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}\right|^2}{h_y^2} + \frac{\left|U_{i+1,j}^{y}\psi_{i+1,j+!} - \psi_{+!i,j}\right|^2}{h_y^2}\right)$$

$$+\frac{h_x h_y}{4}\left(\frac{|\psi_{i,j}|^4}{2}-\tau_{i,j}|\psi_{i,j}|^2+\frac{|\psi_{i+1,j}|^4}{2}-\tau_{i+1,j}|\psi_{i+1,j}|^2\right.$$

$$\left.+\frac{|\psi_{i+1,j+!}|^4}{2}-\tau_{+!i,j+!}|\psi_{+!i,j+!}|^2+\frac{|\psi_{1,j+!}|^4}{2}-\tau_{i,j+!}|\psi_{i,j+!}|^2\right)$$

$$+\,i\kappa^2\ln L_{i,j}\left(\frac{i\ln L_{i,j}}{h_x h_y}-2H\right) \tag{17}$$

Syarat Batas Eksternal

1. Syarat batas yang diberikan kepada parameter benahan ψ pada permukaan bahan yaitu pada node $i = 1$ dan $i = N_x + 1$ adalah

   $$\psi_{1,j} = U^x_{1,j}\psi_{2,j} \qquad \psi_{N_x+1,j} = \overline{U}^x_{N_x,j}\psi_{N_x,j} \tag{18}$$

   Sedangkan pada node $j = 1$ dan $j = N_x + 1$ syarat batas yang harus dipenuhi adalah

   $$\psi_{i,1} = U^y_{i,1}\psi_{i,2} \quad \psi_{i,N_y+j} = \overline{U}^y_{i,N_y}\psi_{i,N_y} \tag{19}$$

   Syarat batas ini diberikan oleh kendala bahwa tidak ada arus super yang lepas pada arah tegak lurus.

2. Syarat batas yang harus dipenuhi oleh variabel pautan $U^x_{i,j}$ dan $U^y_{i,j}$ pada permukaan bahan adalah

   $$L_{i,j} = \exp\left(-ih_x h_y H\right)$$

   syarat batas ini diberikan oleh kendala bahwa besarnya medan magnet di permukaan bahan harus sama dengan medan magnet luar yang dikenakan pada bahan.

Setelah didefinisikan fungsional Ginzburg-Landau (17), maka langkah berikutnya adalah melakukan minimisasi terhadap fungsional tersebut. Konfigurasi vortex yang yang muncul pada superkonduktor jenis ke-II akibat pengenaan medan magnet luar **H** dapat terjadi akibat ditemukannya minimum global dari sistem. Secara teori, pencarian terhadap minimum global sistem dapat dilakukan dengan berbagai teknik minimisasi antara lain *simulated annealing, genetic annealing, quasi Newton* dan teknik-teknik lain.

Sejauh ini, peneliti belum mengimplementasikan salah satu teknik minimisasi yang disebut di atas. Hal ini mengingat peneliti masih mencari teknik minimisasi mana yang memiliki kemampuan handal untuk menemukan minimum global sistem.

BAB V

KESIMPULAN

Berdasarkan kepada kajian awal pada penyelesaian masalah statika pada superkonduktor, maka dapat ditarik beberapa kesimpulan antara lain

- Perlu dikenalkan variabel pautan terhadap besaran potensial vektor **A** yaitu $U^{x}_{i,j}$ yang terkait dengan potensial kearah sumbu-x dan $U^{y}_{i,j}$ yang berhubungan dengan sumbu-y untuk menghindari kerumitan pada pengungkapan fungsional rapat tenaga Gibbs.
- Perlu dilakukan minimisasi terhadap fungsional rapat tenaga bebas Gibbs untuk memperoleh distribusi parameter benahan dan induksi magnet di dalam bahan akibat pengenaan medan magnet luar.

DAFTAR PUSTAKA

Crabtree, G.w., Gunter, D.O., Kaper, H.G., Koshelev, A.E., Leaf, G.K. dan Vinokur, V.M., 2000. Numerical Simulation of Driven Vortex System, *Phys. Rev. B,* **61,** 1446

Cyrot, M dan Pavuna, M., 1992. *Introduction to Superconductivity and High Tc Material*, Singapore: World Scientific Publication co. Ptc. Ltd.

Gunter, D.O., Kaper, H.G. dan Leaf, G.K., 2002, *SIAM J.Sci. Comput.,* **23,** 1943.

Tinkham M., 1996, *Introduction to Superconductivity,* Singapore: McGraw-Hill Inc.